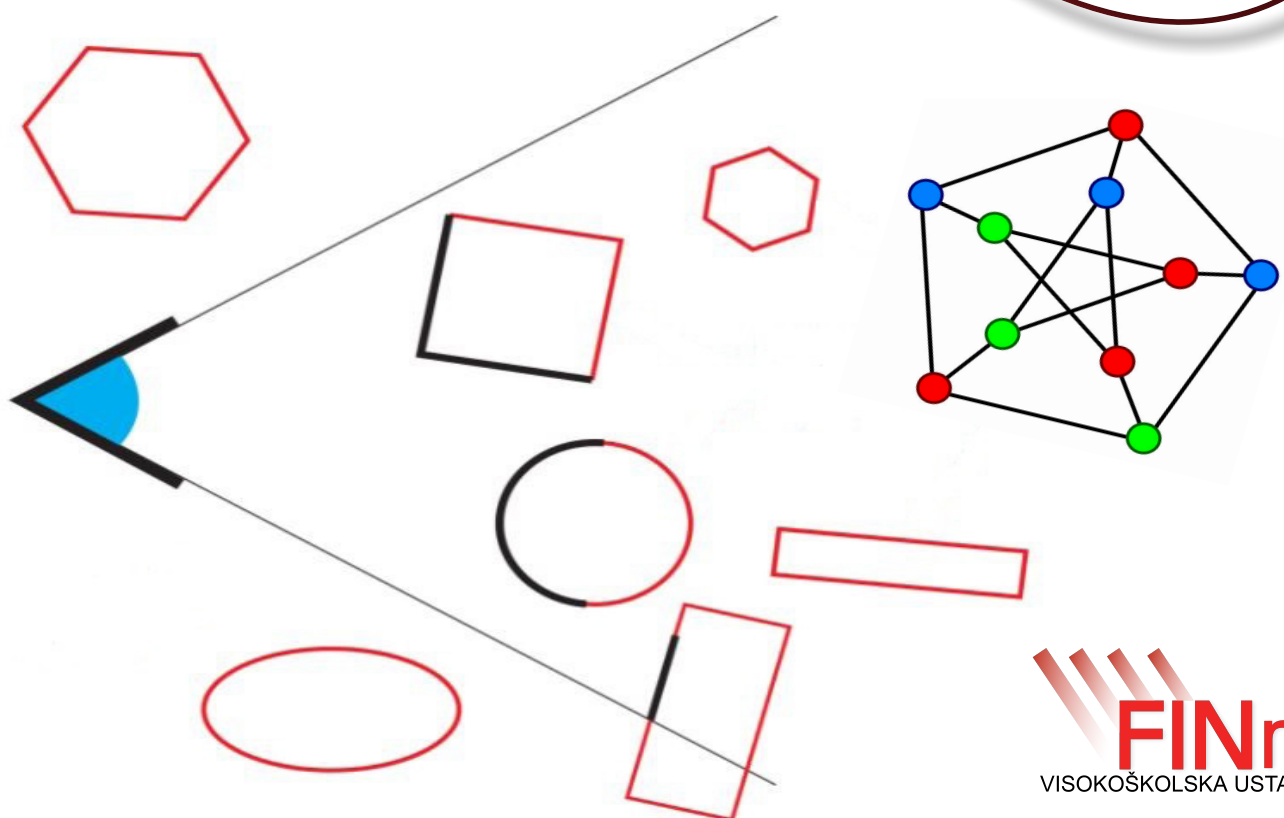


ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA

doc.dr.sc. Zoran Jasak

mr.sc. Aldijana Omerović



Zoran Jasak

Aldijana Omerović

ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA

Tuzla, 2021

ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA

dr.sc. Zoran Jasak

mr.sc. Aldijana Omerović

Izavač:

Visoka škola za finansije i računovodstvo FINra Tuzla

Za izdavača:

dr.sc. Ismet Kalić, vanredni profesor, direktor Visoke škole FINra

Recenzenti:

dr.sc. Branko Sarić, redovni profesor

dr.sc. Senad Rešić, vanredni profesor

Štampa:

Neutrino

Tiraž:

100 primjeraka

Izvod iz recenzije: Knjiga predstavlja veliki doprinos naporima da se studentima i drugim korisnicima, bez obzira na oblast interesovanja, pruži izvor iz kojeg će znanja ovog tipa sticati na sistematski način. Smatram da je knjiga prikladna da se koristi kao udžbenik na visokoškolskim ustanovama koje u svojim programima obrađuju temu Algoritama. U tom smislu toplo preporučujem prihvatanje i izdavanje ove knjige. Sead Rešić

CIP - Katalogizacija u publikaciji

Nacionalna i univerzitetska biblioteka Bosne i Hercegovine, Sarajevo

004.6.021

JASAK, Zoran

Algoritmi i strukture podataka / Zoran Jasak, Aldijana Omerović. - Tuzla : Visoka škola za finansije i računovodstvo, FINra, 2021. - 291 str. : graf. prikazi, tabele ; 25 cm

ISBN 978-9926-8185-2-4

1. Omerović, Aldijana

COBISS.BH-ID 45433350

Sadržaj

I	Uvod u algoritme	3
1	Osnovni pojmovi	5
1.1	Uvod	5
1.1.1	Predstavljanje algoritama	9
1.1.2	Ulaz i izlaz	12
1.1.3	Korektnost algoritma	12
1.2	Linijski algoritmi, grananja	14
1.3	Ciklični algoritmi	17
1.3.1	Opšti pojmovi	17
1.3.2	Sume i proizvodi	20
1.3.3	Cijeli brojevi	26
1.3.4	Nizovi brojeva i znakova	33
1.3.5	Kombinatorni zadaci	41
1.4	Pitanja, zadaci	44
1.4.1	Pitanja	44
1.4.2	Zadaci za vježbu	45
2	Složenost algoritama	47
2.1	Uvod	47
2.1.1	Opšte napomene	47
2.1.2	Koncept analize složenosti	48
2.1.3	Primjeri analize	49
2.2	Asimptotska procjena	52
2.2.1	Uvod	52
2.2.1.1	Θ -notacija	52
2.2.1.2	$\mathcal{O}$ -notacija	53
2.2.1.3	Ω -notacija	54
2.2.2	Složenosti nekih tipova algoritama	54
2.2.2.1	Algoritmi konstantnog vremena	54
2.2.2.2	Algoritmi linearnog vremena	55
2.2.2.3	Algoritmi kvadratnog vremena	55
2.2.2.4	Algoritmi logaritamskog vremena	56
2.2.2.5	Algoritmi superlinearnog vremena	56
2.2.2.6	Algoritmi brzine $\sqrt{n}$	56
2.2.2.7	Algoritmi eksponencijalnog vremena	56
2.2.2.8	Kombinacije algoritama	57
2.3	Pitanja, zadaci	58
2.3.1	Pitanja	58

2.3.2	Riješeni zadaci	58
2.3.2.1	Kalkulacija složenosti	58
2.3.2.2	Asimptotska procjena	61
2.3.3	Zadaci za vježbu	66
3	Rekurzije	69
3.1	Pojam rekurzije	69
3.1.1	Uvod	69
3.1.2	Formalna definicija	70
3.1.3	Kada se ne koristi rekurzija	71
3.2	Analiza složenosti rekurzije	73
3.2.1	Uvod	73
3.2.2	Rekurentne jednačine	74
3.2.3	Primjeri	76
3.3	Master teorema	77
3.3.1	Formulacija i dokaz	77
3.3.2	Riješeni zadaci	79
3.4	Euklidov algoritam	88
3.4.1	Uvod	88
3.4.2	Kako radi Euklidov algoritam ?	89
3.4.3	Proširenje Euklidovog algoritma	90
3.4.4	Složenost	91
3.4.5	Programsko rješenje	93
3.5	Pitanja, zadaci	93
3.5.1	Pitanja	93
3.5.2	Zadaci	94
II	Algoritmi u primjeni	97
4	Metode sortiranja	99
4.1	Uvod	99
4.1.1	Definicija	99
4.1.2	Aspekti metoda sortiranja	100
4.1.3	Mjera sortiranosti	102
4.2	Sortiranje nizova, osnovne metode	102
4.2.1	Sortiranje umetanjem (Insertion sort)	102
4.2.2	Shell sort	105
4.2.3	Sortiranje putem direktne podjele (Selection sort)	108
4.2.4	Sortiranje putem zamjene (Bubble sort)	110
4.3	Poboljšane metode (složenost $n \log n$)	114
4.3.1	Merge sort	114
4.3.2	Quick sort	118
4.4	Pitanja	121
5	Grafovski algoritmi	123
5.1	Uvod	123
5.1.1	Opšte napomene	123
5.1.2	Definicije i elementi grafova	123

5.1.3	Tipovi grafova	124
5.1.4	Predstavljanje grafova	126
5.2	Metode pretraživanja	126
5.3	Algoritmi najkraćeg puta	128
5.3.1	Dijkstra algoritam	129
5.4	Minimalno razapinjuće stablo	130
5.4.1	Kruskalov algoritam	132
5.4.2	Primov algoritam	133
5.5	Out-of-Kilter algoritam	134
5.5.1	Uvod	134
5.5.2	Matematička formulacija	136
5.5.3	Opis algoritma	139
5.6	Pitanja, zadaci	144
5.6.1	Pitanja	144
5.6.2	Riješeni primjeri	145
5.6.3	Zadaci za vježbu	147
6	Tjuringova mašina	151
6.1	Uvod	151
6.1.1	Alan Tjuring	152
6.2	Opis Tjuringove mašine	152
6.2.1	Alfabet	152
6.2.2	Neformalni opis Tjuringove mašine	153
6.2.3	Formalni opis Tjuringove mašine	154
6.3	Rješivost problema	156
6.4	Zadaci, vježbe	157
6.4.1	Riješeni primjeri	157
6.4.2	Zadaci za vježbu	163
7	Pseudoslučajni brojevi	165
7.1	Uvod	165
7.1.1	Zašto slučajni brojevi ?	166
7.1.2	Podjela generatora	166
7.1.2.1	Generatori slučajnih brojeva	166
7.1.2.2	Generatori pseudoslučajnih brojeva	168
7.2	Generatori slučajnih brojeva	169
7.2.1	Izbor generatora	169
7.2.2	Važna svojstva generatora	170
7.2.3	Elementi i podjela generatora	171
7.2.4	Opis nekih generatora	171
7.2.4.1	Midsquare method	171
7.2.4.2	Linearni kongruentni generator	172
7.2.4.3	Opšti kongruentni generator	173
7.2.4.4	Mersenov twister	174
7.2.4.5	Algoritam Marsaglia	175
7.3	Raspodjele	177
7.3.1	Uniformna raspodjela	178
7.3.2	Gausova raspodjela	178

7.4	Testiranje slučajnosti, primjena	179
7.4.1	Testiranje slučajnosti	179
7.4.1.1	Benfordov zakon	180
7.4.1.2	Goutereau konstanta	181
7.4.2	Primjena	181
7.5	Pitanja, zadaci	182
7.5.1	Pitanja	182
7.5.2	Zadaci za vježbu	182
III	Strukture podataka	183
8	Koncept	185
8.1	Uvod	185
8.2	Koncept	188
9	Tipovi podataka i struktura	191
9.1	Klasifikacija tipova podataka	191
9.2	Nestrukturirani tipovi podataka	192
9.2.1	Opšte napomene	192
9.2.2	Enumeracija	193
9.2.3	Cjelobrojni tip	194
9.2.4	Realni tip	195
9.2.5	Logički tip	196
9.2.6	Grafički znaci (slova)	197
9.2.7	Skup	197
9.3	Strukturirani tipovi	198
9.3.1	Niz	198
9.3.2	Slog	199
9.3.3	Sekvenca	200
9.3.3.1	Operacije	202
9.3.3.2	Predstavljanje	204
9.4	Dinamički tipovi podataka	205
9.4.1	Rekurzivni tip	205
9.4.2	Pointer	207
9.4.3	Povezana lista	209
9.4.3.1	Operacije	210
9.4.4	Stabla	212
9.4.4.1	Operacije	213
9.5	Datoteke	214
10	Aksiomatizacija	217
10.1	Uvod	217
10.2	Aksiomi	218
10.2.1	Enumeracija i podrangovi	218
10.2.2	Dekartov proizvod	220
10.2.3	Nizovi	220
10.2.4	Sekvence	221

IV	Kompleksni algoritmi	223
11	NP Složenost	225
11.1	Uvod	225
11.2	Problemi odlučivanja	226
11.3	Problemi prepoznavanja jezika	227
11.3.1	Verifikacija polinomijalnog vremena i certifikati	229
11.3.1.1	NP klasa	230
11.3.1.2	Problem tri boje	232
11.3.1.3	Clique pokrivač (cover) (CCov)	232
11.3.1.4	Redukcija na polinomijalno vrijeme	234
11.3.2	NP kompletnost	235
12	Neki teži algoritamski problemi	237
12.1	Algoritam mravlje kolonije	237
12.1.1	Uvod	237
12.1.2	Koncept	238
12.1.3	Tipovi algoritama	239
12.2	Primjena	241
12.2.1	Problem trgovačkog putnika	242
12.2.2	Quadratic assignment problem	245
12.2.3	Job-shop problem rasporeda	245
12.2.4	Problem putanje vozila	246
12.2.5	Problem najkraće zajedničke supersekvence	246
12.2.6	Problem bojenja grafova	247
12.2.7	Konektivno mrežno rutiranje	247
12.2.8	Nekonektivno mrežno rutiranje	248
A	Razrada algoritma pomoću matrice	253
B	Zadaci za vježbu	257
B.1	Uvod	257
B.2	Zadaci po temama	257
B.2.1	Seminarski zadaci	257
B.2.2	Prosti linijski algoritmi	265
B.2.3	Grananja	266
B.2.4	Cjelobrojna aritmetika	267
B.2.5	Šahovska ploča	269
B.2.6	Sume i proizvodi	270
B.2.7	Ciklusi	272
B.2.8	Tabeliranje vrijednosti	273
B.2.9	Nizovi brojeva	274
B.2.10	Ciklusi sa uslovom tačnosti	275
B.2.11	Ciklusi i grananja	276
B.2.12	Nizovi znakova	277
B.2.13	Kalkulacije sa pohranom vrijednosti	278
B.2.14	Ugnježdeni ciklusi	279
B.2.15	Geometrija	282
B.2.16	Crtanje funkcija	283

B.2.17 Matrični račun	283
B.2.18 Procedure	287
B.2.19 Polinomi	288
B.2.20 Rekurzije	288
B.2.21 Kalendar	291
B.2.22 Konjunktore	291

Predgovor

Društveni interes za objavu ovog teksta je bogaćenje stručnog opusa u području računarskih nauka, te aktuelnosti teme jer se algoritmi i strukture podataka nalaze u centru svih metodologija koje se koriste u radu sa savremenim računarima. Cilj je da objava knjige bude doprinos teorijskom i praktičnom unaprijeđenju ove naučne oblasti.

Knjiga je organizovana u pet dijelova.

U prvom dijelu, Uvod u algoritme, dat je prikaz osnova kao što su pojam, svojstva, podjela po raznim aspektima i slično. Na odabranom uzorku primjera su prezentirane metode planiranja i dizajna algoritama, te njihovog predstavljanja u formi pseudo koda. Naglasak je stavljen na vremensku složenost algoritama. Čitalac se uvodi u računsku efikasnost algoritama tako da može steći predstavu o prednostima i nedostacima različitih potencijalnih pristupa za svaki zadatak. Poglavlje o rekurzijama obuhvata Master teorem, te odabir primjera kojima se ilustruju prednosti i nedostaci rekurzija. Euklidov algoritam, u osnovnom i naprednom obliku je nezaobilazna tema u svim knjigama koje se bave algoritmima.

U drugom dijelu, Algoritmi u primjeni, obrađene su metode sortiranja, grafički algoritmi, Tjuringova mašina, pseudoslučajni brojevi. Svaka od ovih tema je značajna i sa teorijskog i praktičnog stanovišta. U okviru razrade grafovskih algoritama date su bitni aspekti (pretraga po grafovima, određivanje artikulacionih tačaka grafa, određivanje mostova grafa, računanje najkraćih puteva i određivanje minimalnog povezujućeg stabla). Posebna sekcija je posvećena Out-Of-Kilter algoritmu. Prema najboljem znanju autora, ovaj algoritam nema odgovarajuću pažnju u domaćoj naučnoj i stručnoj literaturi. Opisane su standardne metode sortiranja kao što su sortiranje umetanjem, selection sort, Shell sort, Bubble sort, kao i neke napredne tehnike kao što su Merge sort i Quick sort. Metode generisanja pseudoslučajnih brojeva su važne sa stanovišta simulacija i svih drugih situacija u kojima je generisanje slučajnih brojeva značajan aspekt ili nezaobilazan element. Primjer je elektronsko poslovanje i rad sa jednokratnim lozinkama. Tjuringova mašina je obrađena na primjerima koji su odabrani na način da mogu čitaocu predočiti koncepte dizajna algoritama na osnovnom nivou.

U trećem dijelu, Strukture podataka, dat je prikaz osnovnih struktura, kao što su niz, sekvenca, zapis (slog), te složenih struktura kao što su liste, stekovi, stabla i slično. Objašnjava se njihova upotreba u nizu različitih algoritama pretraživanja i sortiranja. Dodato je poglavlje o aksiomatizaciji struktura podataka, koja je u dostupnoj literaturi gotovo potpuno zaobidena i zanemarena.

U četvrtom dijelu, Kompleksni algoritmi, dat je teorijski prikaz NP-složenih algoritama, sa osnovnim definicijama i svojstvima. Ovaj aspekt je ilustrovan nekim pozna-

tim tipovima složenih algoritama, kao što su algoritam mravlje kolonije, problem trgovačkog putnika, quadratic assignment problem, bojenje grafova, konektivno i nekonektivno mrežno rutiranje i slično.

U petom dijelu, Dodatak, dat je prikaz mogućnosti rješavanja problema grafova pomoću matrica. U nastavku je izbor velikog broja problema za samostalno rješavanje, sa grubom podjelom na teme.

U knjizi se nismo ograničili na implementaciju algoritama i struktura podataka u bilo kom od jezika, već ih opisujemo i objašnjavamo jednostavnim pseudokodom koji se lako može implementirati na bilo koji odgovarajući jezik.

Prvenstvena namjena knjige ogleda se u njenoj širokoj primjeni u praksi jer je namijenjena svima koji žele da se upoznaju sa osnovnim strukturama podataka i sa klasama često primjenjivanih algoritama.

S tim u vezi, činjenica je da je oblast algoritmi i strukture podataka potvrdila svoje mjesto u računarstvu zbog praktične važnosti i teorijske elegancije. Sa jedne strane praktičari mogu koristiti dobre algoritme i efikasne strukture podataka u složenim programskim projektima, dok su sa druge strane važni za istraživače jer je to važan alat kojim se mjeri stepen složenosti nekog računarskog problema.

Cilj je da se budućim čitaocima predstavie osnove ove fascinantne oblasti računarstva. Iz tog razloga se u knjizi prvenstveno razmatraju neke od najosnovnijih metoda i paradigmi za dizajniranje i analiziranje struktura podataka i složenosti algoritama.

Prilikom pisanja tekstova ovog tipa, uz sav trud koji se uloži, postoji latentan rizik grešaka, kako tehničke tako i materijalne prirode. Autori su zahvalni za sve eventualne sugestije kojima se sadržaj ove knjige može unaprijediti na bilo koji način.

Autori.

Dio I

Uvod u algoritme

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Uvod

01.01. Termin "algoritam" je nastao po latinskom prevodu imena matematičara iz devetog vijeka, Abu Jafar Muhammad Ibn Musu Al-Khowarizmi, koji se bavio trigonometrijom, astronomijom, geografijom, kartografijom, a smatra se ocem algebre jer je definirao osnovna pravila rješavanja linearnih i kvadratnih jednačina. Njegovi radovi su osnova razvoja mnogih matematičkih i prirodnih disciplina, među njima i računarstva.

Prvi zapis algoritma prilagođen računarstvu pripada Adi Byron iz 1842, pa se zbog ovoga smatra prvom programerkom, a računao je Bernoullijeve brojeve. Računar za koji je napisan je bio analitički stroj koji je zamislio, ali nikad u potpunosti proveo u djelo, Englez Charles Babbage. Analitički stroj je trebao biti prvi programabilni računar, sastavljen u potpunosti od mehaničkih dijelova. Mehanički dijelovi i fizička glomaznost su glavni razlozi zašto nikad nije završen.

Algoritam se definiše na nekoliko načina:

- Algoritam je skup pravila kojima se provodi kalkulacija bilo ručno bilo putem mašine;
- Algoritam je procedura od konačnog broja koraka kako bi se dobio traženi rezultat;
- Algoritam je niz računskih koraka kojima se ulaz transformiše kako bi se dobio izlaz;
- Algoritam je niz operacija koje se izvode nad podacima koji trebaju biti organizovani u strukturama podataka;
- Algoritam je apstrakcija programa koji se treba izvesti na fizičkoj mašini (model izračunavanja);

U tekstu [11] algoritam se definiše kao "jasno specificiran matematički proces izračunavanja; skup pravila koji ako se slijede daju željeni rezultat". U matematici, računarstvu, lingvistici i srodnim disciplinama, algoritam je konačan niz dobro definisanih naredbi