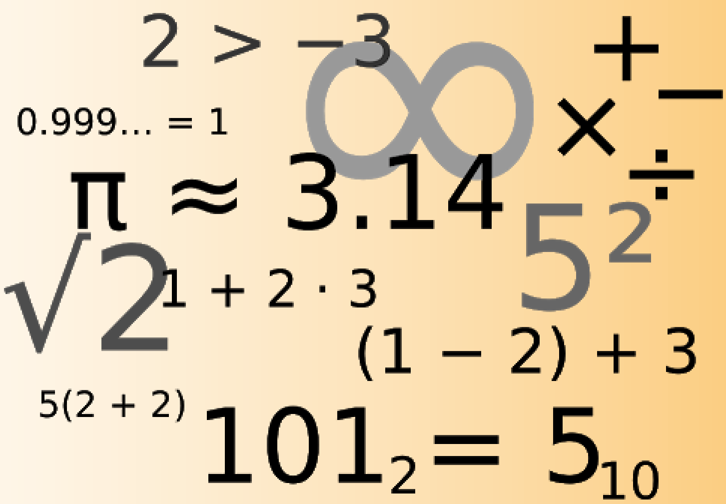
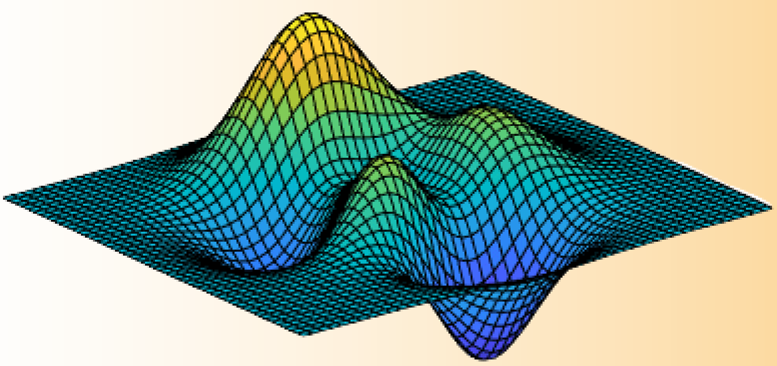
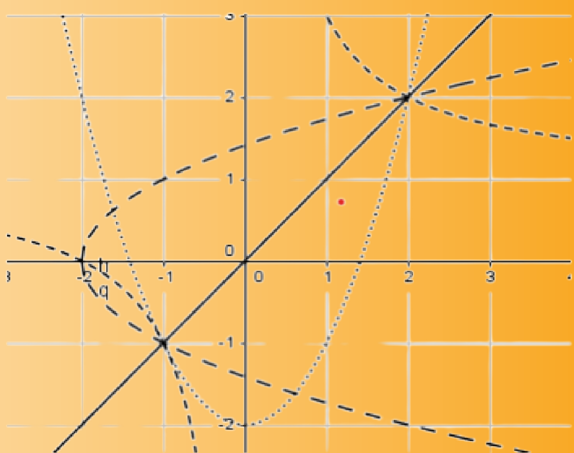
FINra
VISOKOŠKOLSKA USTANOVA

doc.dr.sc. Zoran Jasak
mr.sc. Irma Ibrišimović

NUMERIČKA MATEMATIKA







VISOKA ŠKOLA ZA FINANSIJE I RAČUNOVODSTVO

Zoran Jasak

Irma Ibrišimović

NUMERIČKA MATEMATIKA

Tuzla, 2021

NUMERIČKA MATEMATIKA

dr.sc. Zoran Jasak
mr.sc. Irma Ibrišimović
Izavač:
Visoka škola za finansije i računovodstvo FINra Tuzla
Za izdavača:
dr.sc. Ismet Kalić, vanredni profesor, direktor Visoke škole FINra
Recenzenti:
dr.sc. Branko Sarić, redovni profesor
dr.sc. Senad Rešić, vanredni professor
Štampa:
Neutrino
Tiraž:
100 primjeraka

Izvod iz recenzije: Na osnovu navedenog, cijenim da ova knjiga posjeduje veliki kvalitet u svakom pogledu i da se treba preporučit svakome ko želi steći osnovna teorijska i praktična znanja iz domena numeričke matematike. Smatram da je knjiga prikladna da se koristi kao udžbenik na visokoškolskim ustanovama koje u svojim programima obrađuju temu Numeričke matematike. U tom smislu toplo preporučujem prihvatanje i izdavanje ove knjige. (Sead Rešić)

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka Bosne i Hercegovine, Sarajevo

519.6

JASAK, Zoran
Numerička matematika / Zoran Jasak, Irma Ibrišimović. - Tuzla : Visoka škola za finansije i računovodstvo, FINra, 2021. - 344 str. : ilustr. ; 25 cm

ISBN 978-9926-8185-3-1

1. Ibrišimović, Irma

COBISS.BH-ID 45431046

Sadržaj

Predgovor

Numerička matematika je oblast matematike koja se bavi razradom metoda koji dovode do numeričkog rezultata mnogih osnovnih zadataka iz domena matematičke analize, algebre, geometrije i slično.

Termini Numerička matematika i Numerička analiza se uzimaju kao sinonimi. U nastavku dajemo definicije koje pokazuju da postoje važne nijanse koje treba imati u vidu.

Numerička matematika[1] je grana matematike koja se bavi numeričkim približnim (aproksimativnim) rješavanjem matematičkih problema. Obzirom na polje matematike kojim se bavi, razlikujemo numeričku analizu, numeričku linearnu algebru, numeričko rješavanje nelinearnih jednačina, interpolacijske metode, aproksimativne metode, itd.

Numerička analiza[2] je grana numeričke matematike koja se bavi pronalaženjem i unapređivanjem algoritama za numeričko izračunavanje vrijednosti vezanih uz matematičku analizu, poput numeričkog integriranja, numeričkog diferenciranja i numeričkog rješavanja diferencijalnih jednačina. Sastavni dio numeričke analize je i ocjenjivanje grešaka metoda (algoritama) i to na dva nivoa – analiza grešaka same metode, te analiza grešaka koje nastaju računanjem vrijednost, a vezane su uz arhitekturu računara.

Posebna je uloga numeričkih metoda u rješavanju integrala i diferencijalnih jednačina, budući velik broj problema ovog tipa nije analitički rješiv, a izuzetno su važni u primjenama. Nasuprot tome, potreba za numeričkim diferenciranjem nije izrazita, budući za taj segment postoji konačan skup pravila pomoću kojeg je moguće naći izvod svake funkciju simboličkim postupcima.

Numerička linearna algebra je grana numeričke matematike koja se bavi pronalaženjem algoritama za brzo rješavanje problema linearne algebre. U prvom redu treba istaknuti metode za rješavanje sistema linearnih i nelinearnih jednačina, te metode za određivanje sopstvenih vrijednosti i inverza matrice. Za razliku od npr. numeričke analize, metode u numeričkoj linearnoj algebri nisu prvenstveno aproksimativne (mada postoje i takve), već je osnovni problem optimizirati vremensko trajanje i memorijske zahtjeve rješavanja problema putem računarske podrške. Sistemi linearnih jednačina i matrice koje se rješavaju ovim algoritmima u pravilu su velikih dimenzija.

Interpolacione metode su razvijene kako bi se kroz konačan broj tačaka (koje najčešće predstavljaju neka mjerenja) provukla funkcija određenih karakteristika. Za takvu funkciju, koja prolazi kroz sve zadane tačke, kažemo da interpolira zadani skup tačaka. Interpolacione metode prvanstveno se bave traženjem polinoma koji interpoliraju zadane tačke,

[1]Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Numerička_matematika
[2]https://hr.wikipedia.org/wiki/Numerička_analiza

zbog mnogih dobrih karakteristika polinoma (poput neprekidnosti i glatkoće). S druge strane, pokazalo se da polinomi visokog stepena, iako interpoliraju, loše aproksimiraju funkciju, pa se problem interpolacije u praksi obično rješava traženjem po dijelovima linearnih funkcija ili po dijelovima kubnih funkcija (tzv. spline-ovi).

Aproksimativne metode su razvijene kako bi se što bolje aproksimirala neka funkcija na datom intervalu. U praksi, funkcija koju pokušavamo aproksimirati često nije ni poznata, već znamo samo konačan broj njezinih tačaka (mjerenja). Za razliku od interpolacijskih metoda, cilj ovoga nije naći funkciju koja će proći kroz sve zadane tačke, već odrediti onu koja će ukupno najmanje odstupati od (pretpostavljene) funkcije na cijelom intervalu. Najviše korištena metoda za određivanje aproksimativne funkcije je "metoda najmanjih kvadrata".

Ova knjiga je sačinjena kao osnovno gradivo za predmet Numerička matematika na visokoškolskim ustanovama, kao početni materijal ili kao dodatni izvor. Materijal je nastao na osnovu dugogodišnjeg iskustva autora na ovom predmetu.

Glavna namjena teksta je da prezentira neke važne numeričke metode, za koje su date teorijske osnove i ilustrovane primjerima. Zbog potrebe da korisnici što prije ovladaju praktičnim aspektom, od čega je programska podrška jedna od najvažnijih, svaka od metoda je predstavljena algoritamski, na konceptualnom nivou, putem izvornih programskih procedura ili oboje. Primjeri su odabrani tako da su primjenjivi u gotovo svim aspektima, počev od finansija do inžinjerskih primjena.

Naglasak je na numeričkim metodama. U tom smislu, dat je dokaz samo nekih važnijih teorijskih aspekata numeričke analize, za koje je procijenjeno da su bitni sa stanovišta neophodnog stepena teorijskog razumijevanja problematike.

Knjiga je organizovana u pet dijelova, podijeljenih na logičke cjeline. U dodatku su obrada nekih specifičnih veličina iz domena finansija (kamatne stope i kamatni koeficijenti), izvorni kodovi u programskom paketu Mathematica.

Dio I

Približne vrijednosti

Poglavlje 1

Pojam približne vrijednosti i greške

U dostupnim definicijama približnih brojeva prisutan je veliki stepen neodređenosti. Ako se približnost definiše kao "neznatno razlikovanje" nije jasno šta se podrazumijeva pod terminom "neznatno". Ako se sa x^* označi približna vrijednost neke veličine x tada njihova razlika u praktičnom smislu nekad može biti značajna, a nekad ne, što zavisi od kriterija kojim mjerimo da li je razlika "velika" ili "mala".

Zbog ovoga uzmimamo da je približan broj osnovni pojam i ne definišemo ga posebno. Predstavu možemo stvoriti pomoću primjera iz okruženja, iz nauke i tehnike i slično.

Primjer 1.0.1 *Kad se kaže da neki grad ima* 140 000 *stanovnika, jasno je da taj podatak nije u potpunosti tačan. Najbliži je stvarnoj vrijednosti tokom popisa, ali i tada postoji odstupanje jer se u istom periodu dešavaju promjene (rađanja, smrti, doseljavanje, iseljavanje, odsustva i slično). Jedino možemo reći da je taj broj u nekim granicama, naprimjer od* 139 000 *do* 141 000 *stanovnika.*

Primjer 1.0.2 *Ako se proizvod* $258.14736 \cdot 0.1112229$ *računa na kalkulatoru sa* 8 *mjesta, tada se jedan broj cifara tačnog rezultata (*28.711898006544*) odbacuje odnosno uređaj to sam 'uradi' zbog fizičkog ograničenja mogućnosti prikaza i/ili kalkulacije.*

Primjer 1.0.3 *Ako je a dužina stranice kvadrata, dužina dijagonale je* $a\sqrt{2}$*. Očito je da ne možemo potpuno tačno izračunati dužinu jer je* $\sqrt{2}$ *iracionalan broj.*

1.1 Tipovi grešaka

Praksa često nameće potrebu rada sa približnim a ne tačnim veličinama. Umjesto stvarnog rezultata često smo zadovoljni aproksimacijom, procjenom najbliže vrijednosti. U takvim situacijama moramo biti svjesni kakvu grešku unosimo u račun i znati kakve posljedice to može imati na konačni rezultat.