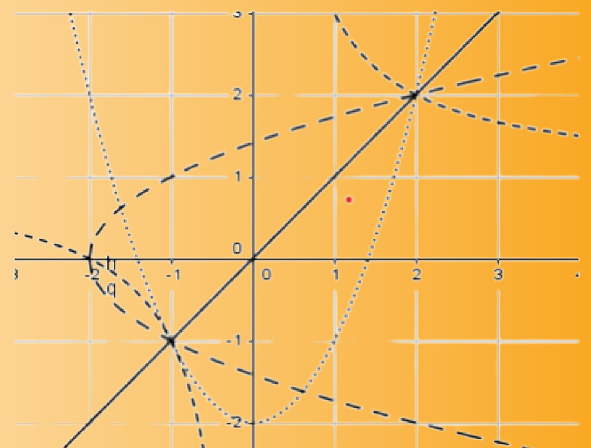
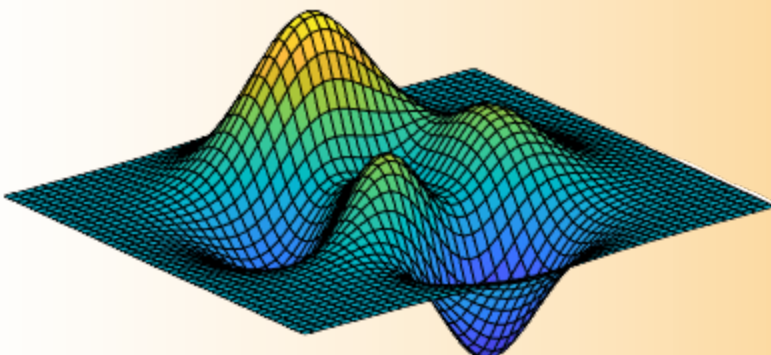


doc.dr.sc. Zoran Jasak
mr.sc. Irma Ibrišimović

NUMERIČKA MATEMATIKA

$$\begin{array}{c}
 2 > -3 \\
 0.999... = 1 \\
 \pi \approx 3.14 \\
 \sqrt{2} \\
 5(2+2) \\
 101_2 = 5_{10}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 + \\
 - \\
 \times \\
 \div \\
 5^2 \\
 (1-2)+3
 \end{array}$$



Zoran Jasak

Irma Ibrišimović

NUMERIČKA MATEMATIKA

Tuzla, 2021

NUMERIČKA MATEMATIKA

dr.sc. Zoran Jasak
mr.sc. Irma Ibrišimović

Izavač:

Visoka škola za finansije i računovodstvo FINra Tuzla

Za izdavača:

dr.sc. Ismet Kalić, vanredni profesor, direktor Visoke škole FINra

Recenzenti:

dr.sc. Branko Sarić, redovni profesor

dr.sc. Senad Rešić, vanredni profesor

Štampa:

Neutrino

Tiraž:

100 primjeraka

Izvod iz recenzije: Na osnovu navedenog, cijenim da ova knjiga posjeduje veliki kvalitet u svakom pogledu i da se treba preporučiti svakome ko želi steći osnovna teorijska i praktična znanja iz domena numeričke matematike. Smatram da je knjiga prikladna da se koristi kao udžbenik na visokoškolskim ustanovama koje u svojim programima obrađuju temu Numeričke matematike. U tom smislu toplo preporučujem prihvatanje i izdavanje ove knjige. (Sead Rešić)

CIP - Katalogizacija u publikaciji

Nacionalna i univerzitetska biblioteka Bosne i Hercegovine, Sarajevo

519.6

JASAK, Zoran

Numerička matematika / Zoran Jasak, Irma Ibrišimović. - Tuzla : Visoka škola za finansije i računovodstvo, FINra, 2021. - 344 str. : ilustr. ; 25 cm

ISBN 978-9926-8185-3-1

1. Ibrišimović, Irma

COBISS.BH-ID 45431046

Sadržaj

Sadržaj	i
---------	---

I	Približne vrijednosti	3
----------	------------------------------	----------

1	Pojam približne vrijednosti i greške	5
1.1	Tipovi grešaka	5
1.1.1	Greške zbog polaznih aproksimacija	6
1.1.2	Greške zbog zamjene beskonačnog konačnim	7
1.1.3	Greške zaokruživanja	7
1.2	Predstavljanje brojeva	8
1.2.1	Opšti pojmovi	8
1.2.2	Predstavljanje cijelih brojeva u računarima	9
1.2.3	Predstavljanje realnih brojeva u računarima	10
1.2.4	Tačnost i preciznost	11
1.3	Apsolutna i relativna greška	12
1.3.1	Osnovni pojmovi	12
1.3.2	Značajne i sigurne cifre	14
1.3.3	Relativna greška i njene cifre	16
1.3.4	Dodatne napomene	17
1.4	Računske operacije i približne vrijednosti	18
1.4.1	Uvod	18
1.4.2	Opšta procjena apsolutne i relativne greške	18
1.4.3	Greška zbira i razlike	19
1.4.4	Greška proizvoda	20
1.4.5	Greška količnika	22
1.4.6	Greška stepena i korijena	22
1.4.7	Metoda granica	23
1.4.8	Inverzni problem greške	24
1.5	Pseudoračunske operacije	25
1.5.1	Uvod	25
1.5.2	Definicija i svojstva	25
1.5.3	Relativne greške i ulp-ovi	28
1.5.4	Zaštitne cifre	29
1.5.5	Poništavanje	30
1.5.6	Tačno zaokružene operacije	34
1.5.7	Nekoliko istorijskih činjenica	37
1.6	Zadaci, vježbe, pitanja	37

1.6.1	Riješeni zadaci, približni brojevi	37
1.6.2	Riješeni zadaci, funkcije	38
1.6.3	Zadaci za vježbu	40
1.6.3.1	Približne vrijednosti	40
1.6.3.2	Funkcije	42
1.7	Rješenja	42
1.7.1	Približne vrijednosti	42
1.7.2	Funkcije	47
1.7.3	Rješenja zadataka za vježbu	54
1.7.3.1	Približne vrijednosti	54
1.7.3.2	Funkcije	54
1.8	Pitanja	54

II Interpolacija funkcija 57

2 Uvodne napomene 59

3 Metode interpolacije 63

3.1	Direktna metoda	63
3.2	Lagranžov interpolacioni polinom	64
3.2.1	Interpolaciona formula	64
3.2.2	Šema računanja	65
3.2.3	Ocjena greške i broj koraka	68
3.3	Njutnovi interpolacioni polinomi	69
3.3.1	Konačne razlike	69
3.3.2	Opšti oblik interpolacionog polinoma	71
3.3.3	I Njutnov interpolacioni polinom	73
3.3.3.1	Šema računanja	74
3.3.4	II Njutnov interpolacioni polinom	75
3.3.5	Uporedna analiza dvije metode	76
3.4	Inverzna interpolacija	76
3.5	Splajn interpolacija	77
3.6	Metoda najmanjih kvadrata	79
3.7	Zadaci, primjeri, pitanja	82
3.7.1	Riješeni zadaci, Lagranžov polinom	82
3.7.2	Riješeni zadaci, Njutnov polinom	83
3.7.3	Inverzna interpolacija	83
3.7.4	Riješeni zadaci, splajn	84
3.7.5	Riješeni zadaci, metoda najmanjih kvadrata	84
3.7.6	Zadaci za vježbu	85
3.8	Rješenja	89
3.8.1	Lagranžov polinom	89
3.8.2	Njutnov interpolacioni polinom	96
3.8.3	Inverzna interpolacija	101
3.8.4	Splajn	104
3.8.5	Metoda najmanjih kvadrata	105
3.8.6	Zadaci za vježbu	112
3.9	Pitanja	112

3.10	Algoritmi	112
3.10.1	Lagranžov interpolacioni polinom	112
3.10.2	Kubni splajn	113

III Nelinearne jednačine 115

4 Uvod 117

4.1	Opšte napomene	117
4.2	Lokalizacija rješenja	119

5 Metode rješavanja 121

5.1	Metoda bisekcije	121
5.1.1	Metodologija	121
5.1.2	Ocjena greške i broja koraka	122
5.2	Njutnova metoda	123
5.2.1	Metodologija	123
5.2.2	Ocjena greške i broja koraka	125
5.3	Metoda regula falsi	127
5.3.1	Metodologija	127
5.3.2	Ocjena greške i broja koraka	129
5.4	Metoda iteracije	130
5.4.1	Metodologija	130
5.5	Zadaci, vježbe	132
5.5.1	Lokalizacija nula	132
5.5.2	Bisekcija	132
5.5.3	Njutnova metoda	133
5.5.4	Metoda regula falsi	133
5.5.5	Metoda iteracije	133
5.5.6	Zadaci za vježbu	134
5.6	Rješenja	135
5.6.1	Lokalizacija nula	135
5.6.2	Bisekcija	136
5.6.3	Njutnova metoda	138
5.6.4	Metoda regula falsi	143
5.6.5	Metoda iteracije	145
5.7	Pitanja	146
5.8	Algoritmi	147
5.8.1	Metoda bisekcije	147

IV Determinante i matrice 149

6 Determinante 151

6.1	Pojam i osnovne osobine	151
6.2	Računanje vrijednosti determinante	153
6.3	Zadaci, vježbe	155
6.3.1	Riješeni zadaci	155
6.3.2	Zadaci za vježbu	155

6.3.3	Rješenja	156
7	Matrice	159
7.1	Definicija i osnovni pojmovi	159
7.2	Računske operacije	161
7.3	Inverzne matrice	162
7.3.1	Uvod	162
7.3.2	Metoda kofaktora	162
7.3.3	Metoda pivota	163
7.3.4	Metoda ekvivalentnih transformacija	164
7.4	Pseudonverzne matrice	165
7.4.1	Uvod	165
7.4.2	Teorijske osnove	166
7.4.3	Algoritam	173
7.4.4	Složenost	176
7.4.5	Uporedna analiza	177
7.4.6	Primjer računanja	178
7.5	Omega vrijednost matrice	183
7.5.1	Definicija	183
7.5.2	Veza sa teorijom igara	183
7.6	Zadaci, vježbe	185
7.6.1	Osnovni pojmovi	185
7.6.2	Računske operacije	185
7.6.3	Inverzne matrice	186
7.7	Zadaci za vježbu	186
7.8	Rješenja	186
7.8.1	Osnovi pojmovi	186
7.8.2	Računske operacije	187
7.8.3	Inverzne matrice	188
7.9	Pitanja	190
V	Sistemi linearnih jednačina	191
8	Opšte napomene	193
8.1	Uvod	193
8.2	Norma vektora i matrice	194
8.3	Uslovljenost sistema linearnih jednačina	196
8.3.1	Uvod	196
8.3.2	Uslovljenost, dodatna razmatranja	197
8.4	Procjena greške	197
8.5	Zadaci, vježbe	198
8.5.1	Riješeni zadaci	198
8.5.2	Zadaci za vježbu	199
8.5.3	Rješenja	199

9	Direktne metode	203
9.1	Gausova metoda	203
9.2	Cholesky dekompozicija	206
9.3	LU dekompozicija	207
9.4	QR dekompozicija	210
9.5	Zadaci, vježbe	211
9.5.1	Riješeni zadaci	211
9.5.2	Rješenja	213
10	Iterativne metode	221
10.1	Uvod	221
10.2	Opis iterativnih metoda	222
10.2.1	Jakobijeva metoda	222
10.2.2	Gauss-Seidelova metoda	222
10.2.3	Potrebni i dovoljni uslovi konvergencije	222
10.2.3.1	Opšta razmatranja	222
10.2.3.2	Konvergencija Jakobijeve metode	223
10.2.3.3	Konvergencija Gauss-Seidelove metode	224
10.2.3.4	Procjena greške	225
10.2.4	Metoda proste iteracije	225
10.3	Ostale metode	227
10.3.1	Metoda najmanjih kvadrata	227
10.4	Zadaci, vježbe	228
10.4.1	Riješeni zadaci	228
10.4.2	Rješenja	229
10.4.3	Zadaci za vježbu	237
10.5	Pitanja	243
10.6	Algoritmi	244
10.6.1	Gausova metoda	244
10.6.2	Gaus-Jordanov sistem eliminacije	246
10.6.3	LU dekompozicija	247
11	Sopstvene vrijednosti i vektori	249
11.1	Uvod	249
11.2	Potpune metode	250
11.2.1	Metoda Danilevskog	250
11.2.2	Metoda Krilova	252
11.2.3	Metoda Leverjea	255
11.2.4	Metoda interpolacije	256
11.2.5	Iterativna metoda	257
11.2.6	LQ i RQ metode	258
11.3	Djelimične metode	259
11.3.1	Metoda proizvoljnog vektora	259
11.3.2	Metoda tragova	261
11.3.3	Metoda skalarnih proizvoda	261
11.3.4	Metoda iscrpljivanja	263
11.4	Riješeni zadaci	263
11.5	Rješenja	265

11.6	Pitanja	312
12	Sistemi linearnih jednačina, nastavak	313
12.1	Relaksacione metode	313
12.1.1	Opšte napomene	313
12.1.2	JOR relaksacija	313
12.1.3	SOR relaksacija	314
12.2	Dekompozicija na singularne vrijednosti	315
12.2.1	Opšta metoda	315
12.2.2	ST metoda	316
12.3	Zadaci, vježbe	316
12.3.1	Riješeni zadaci	316
12.3.2	Rješenja	316
12.4	Pitanja	317
VI	Numeričko diferenciranje i integracija	319
13	Numeričko diferenciranje	321
13.1	Uvod	321
13.2	Funkcije jedne promjenljive	322
13.3	Funkcije više promjenljivih	325
13.4	Zadaci, vježbe	325
13.4.1	Funkcije jedne promjenljive	325
13.4.2	Zadaci za vježbu	326
13.5	Rješenja	327
13.5.1	Funkcije jedne promjenljive	327
13.6	Pitanja	333
14	Numerička integracija	335
14.1	Uvod	335
14.2	Metode integracije	337
14.2.1	Opšte napomene	337
14.2.2	Njutn-Kotesove formule	338
14.2.2.1	Trapezno pravilo	339
14.2.2.2	Simpsonovo pravilo	340
14.2.3	Gausova kvadratura formula	341
14.2.4	Nesvojstveni integrali	343
14.3	Zadaci, vježbe	344
14.3.1	Riješeni zadaci	344
14.3.1.1	Njutn-Kotesove formule	344
14.3.1.2	Gausova formula	346
14.3.2	Zadaci za vježbu	346
14.3.3	Rješenja	347
14.3.3.1	Njutn-Kotesove formule	347
14.3.3.2	Gausova formula	351
14.4	Pitanja	354
	Literatura	355

A.1	Koeficijenti po kamatnim stopama	357
-----	--	-----

A.1.1	Kamatni koeficijenti	357
-------	--------------------------------	-----

A.1.2	Koeficijenti za obračun uloga	360
-------	---	-----

A.2	Programski paket Excel	361
-----	----------------------------------	-----

A.3	Gram-Schmidt-ov proces ortogonalizacije	362
-----	---	-----

A.4	Izvorni kodovi u programu Mathematica	363
-----	---	-----

Predgovor

Numerička matematika je oblast matematike koja se bavi razradom metoda koji dovode do numeričkog rezultata mnogih osnovnih zadataka iz domena matematičke analize, algebre, geometrije i slično.

Termini Numerička matematika i Numerička analiza se uzimaju kao sinonimi. U nastavku dajemo definicije koje pokazuju da postoje važne nijanse koje treba imati u vidu.

Numerička matematika¹ je grana matematike koja se bavi numeričkim približnim (aproksimativnim) rješavanjem matematičkih problema. Obzirom na polje matematike kojim se bavi, razlikujemo numeričku analizu, numeričku linearnu algebru, numeričko rješavanje nelinearnih jednačina, interpolacijske metode, aproksimativne metode, itd.

Numerička analiza² je grana numeričke matematike koja se bavi pronalaženjem i unapređivanjem algoritama za numeričko izračunavanje vrijednosti vezanih uz matematičku analizu, poput numeričkog integriranja, numeričkog diferenciranja i numeričkog rješavanja diferencijalnih jednačina. Sastavni dio numeričke analize je i ocjenjivanje grešaka metoda (algoritama) i to na dva nivoa – analiza grešaka same metode, te analiza grešaka koje nastaju računanjem vrijednost, a vezane su uz arhitekturu računara.

Posebna je uloga numeričkih metoda u rješavanju integrala i diferencijalnih jednačina, budući velik broj problema ovog tipa nije analitički rješiv, a izuzetno su važni u primjenama. Nasuprot tome, potreba za numeričkim diferenciranjem nije izrazita, budući za taj segment postoji konačan skup pravila pomoću kojeg je moguće naći izvod svake funkciju simboličkim postupcima.

Numerička linearna algebra je grana numeričke matematike koja se bavi pronalaženjem algoritama za brzo rješavanje problema linearne algebre. U prvom redu treba istaknuti metode za rješavanje sistema linearnih i nelinearnih jednačina, te metode za određivanje sopstvenih vrijednosti i inverza matrice. Za razliku od npr. numeričke analize, metode u numeričkoj linearnoj algebri nisu prvenstveno aproksimativne (mada postoje i takve), već je osnovni problem optimizirati vremensko trajanje i memorijske zahtjeve rješavanja problema putem računarske podrške. Sistemi linearnih jednačina i matrice koje se rješavaju ovim algoritmima u pravilu su velikih dimenzija.

Interpolacione metode su razvijene kako bi se kroz konačan broj tačaka (koje najčešće predstavljaju neka mjerenja) provukla funkcija određenih karakteristika. Za takvu funkciju, koja prolazi kroz sve zadane tačke, kažemo da interpolira zadani skup tačaka. Interpolacione metode prvenstveno se bave traženjem polinoma koji interpoliraju zadane tačke,

¹Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Numerička_matematika

²https://hr.wikipedia.org/wiki/Numerička_analiza

zbog mnogih dobrih karakteristika polinoma (poput neprekidnosti i glatkoće). S druge strane, pokazalo se da polinomi visokog stepena, iako interpoliraju, loše aproksimiraju funkciju, pa se problem interpolacije u praksi obično rješava traženjem po dijelovima linearnih funkcija ili po dijelovima kubnih funkcija (tzv. spline-ovi).

Aproksimativne metode su razvijene kako bi se što bolje aproksimirala neka funkcija na datom intervalu. U praksi, funkcija koju pokušavamo aproksimirati često nije ni poznata, već znamo samo konačan broj njezinih tačaka (mjerjenja). Za razliku od interpolacijskih metoda, cilj ovoga nije naći funkciju koja će proći kroz sve zadane tačke, već odrediti onu koja će ukupno najmanje odstupati od (pretpostavljene) funkcije na cijelom intervalu. Najviše korištena metoda za određivanje aproksimativne funkcije je "metoda najmanjih kvadrata".

Ova knjiga je sačinjena kao osnovno gradivo za predmet Numerička matematika na visokoškolskim ustanovama, kao početni materijal ili kao dodatni izvor. Materijal je nastao na osnovu dugogodišnjeg iskustva autora na ovom predmetu.

Glavna namjena teksta je da prezentira neke važne numeričke metode, za koje su date teorijske osnove i ilustrovane primjerima. Zbog potrebe da korisnici što prije ovladaju praktičnim aspektom, od čega je programska podrška jedna od najvažnijih, svaka od metoda je predstavljena algoritamski, na konceptualnom nivou, putem izvornih programskih procedura ili oboje. Primjeri su odabrani tako da su primjenjivi u gotovo svim aspektima, počev od finansija do inženjerskih primjena.

Naglasak je na numeričkim metodama. U tom smislu, dat je dokaz samo nekih važnijih teorijskih aspekata numeričke analize, za koje je procijenjeno da su bitni sa stanovišta neophodnog stepena teorijskog razumijevanja problematike.

Knjiga je organizovana u pet dijelova, podijeljenih na logičke cjeline. U dodatku su obrada nekih specifičnih veličina iz domena finansija (kamatne stope i kamatni koeficijenti), izvorni kodovi u programskom paketu Mathematica.

Dio I

Približne vrijednosti

Poglavlje 1

Pojam približne vrijednosti i greške

U dostupnim definicijama približnih brojeva prisutan je veliki stepen neodređenosti. Ako se približnost definiše kao "neznatno razlikovanje" nije jasno šta se podrazumijeva pod terminom "neznatno". Ako se sa x^* označi približna vrijednost neke veličine x tada njihova razlika u praktičnom smislu nekad može biti značajna, a nekad ne, što zavisi od kriterija kojim mjerimo da li je razlika "velika" ili "mala".

Zbog ovoga uzimamo da je približan broj osnovni pojam i ne definišemo ga posebno. Predstavu možemo stvoriti pomoću primjera iz okruženja, iz nauke i tehnike i slično.

Primjer 1.0.1 *Kad se kaže da neki grad ima 140 000 stanovnika, jasno je da taj podatak nije u potpunosti tačan. Najbliži je stvarnoj vrijednosti tokom popisa, ali i tada postoji odstupanje jer se u istom periodu dešavaju promjene (rađanja, smrti, doseljavanje, iseljavanje, odsustva i slično). Jedino možemo reći da je taj broj u nekim granicama, naprimjer od 139 000 do 141 000 stanovnika.*

Primjer 1.0.2 *Ako se proizvod $258.14736 \cdot 0.1112229$ računa na kalkulatoru sa 8 mjesta, tada se jedan broj cifara tačnog rezultata (28.711898006544) odbacuje odnosno uređaj to sam 'uradi' zbog fizičkog ograničenja mogućnosti prikaza i/ili kalkulacije.*

Primjer 1.0.3 *Ako je a dužina stranice kvadrata, dužina dijagonale je $a\sqrt{2}$. Očito je da ne možemo potpuno tačno izračunati dužinu jer je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.*

1.1 Tipovi grešaka

Praksa često nameće potrebu rada sa približnim a ne tačnim veličinama. Umjesto stvarnog rezultata često smo zadovoljni aproksimacijom, procjenom najbliže vrijednosti. U takvim situacijama moramo biti svjesni kakvu grešku unosimo u račun i znati kakve posljedice to može imati na konačni rezultat.